UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
PURAS Y APLICADAS
MA1111
Sep-Dic 2008

PRIMER PARCIAL DEPARTAMENTAL. SOLUCIONES.

1. (10 ptos.) Responda en cada caso:

a) $\lim_{x\to\infty} \log(3x-1) = \underline{\quad \infty \quad}$

b) $\lim_{x\to 0} e^x + e^{-x} = \underline{\quad 2 \quad}$

c) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} 5x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2} = \underline{\quad \frac{5}{8} \quad}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+8x^2-3x+1}{4x^3+6x-2} = \underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$

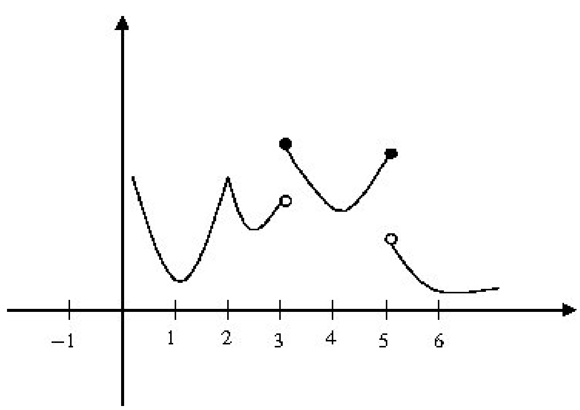
e) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-4)(x^2+2x+1)}{x-2} = \underline{\quad \infty \quad}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \underline{\quad -1 \quad}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-2x+1)\operatorname{sen}(x)}{x} = \underline{\quad 1 \quad}$

h) Escriba la definición de función continua en un punto a.
Sol: Una función f es continua en el punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. También, el estudiante podría escribir la definición en términos de ε y δ.

i) Determine y clasifique los puntos de discontinuidad de la función cuyo gráfico es el siguiente:



Sol: Discontinuidades: $x = 3$ y $x = 5$. Ambas inevitables (no removibles)[1].

[1] También conocidas como de primera especie.

j) Sabiendo que

$$-x^2 \leq x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$, para la función $f(x) = x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
Sol: Como $-x^2 \leq x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$, entonces

$$-\lim_{x\to 0} x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to} x^2.$$

Ya que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

2. (8 ptos.) Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{si } |x| < 3, \\ x^2 + ax + b, & \text{si } |x| \geq 3. \end{cases}$$

Halle, si existen, los valores de las constantes a, b, para los cuales g es continua, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: La función g es continua si $|x| < 3$ (es decir si $-3 < x < 3$), o si $|x| > 3$ (es decir si $x < -3$ o $x > 3$), pues está definida como una función polinomial de grado 2 en cada uno de esos casos. Luego, sólo es necesario estudiar la continuidad de g en los puntos $x = 3$ y $x = -3$.

Para que g sea continua en cada uno de esos puntos, deben satisfacerse las igualdades:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3} g(x) = g(-3).$$

Por lo que se deben estudiar los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^{\pm}} g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3^{\pm}} g(x).$$

Ya que

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+1)^2 = 16,$$
$$\lim_{x\to -3^+} g(x) = \lim_{x\to -3^+} (x+1)^2 = 4,$$
$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2 + ax + b = 9 + 3a + b = g(3),$$
$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^-} x^2 + ax + b = 9 - 3a + b = g(-3),$$

y debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^-} g(x) = g(3),$$
$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^+} g(x) = g(-3),$$

se deduce el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 9 - 3a + b = 4 \\ 9 + 3a + b = 16 \end{cases}$$

cuyas soluciones $a = 2$ y $b = 1$, son los valores buscados.

3. (10 ptos.) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-\sqrt{2})^2, & \text{si } 0 < x \leq \sqrt{2}, \\ e^{x^2-2}, & \text{si } x > \sqrt{2}, \\ -1, & \text{si } x = -\sqrt{2}, \\ x^2, & \text{si } -\sqrt{2} < x \leq 0, \text{ ó } x < -\sqrt{2}. \end{cases}$$

a) Diga, justificando, para cuáles valores de x la función no es continua.

b) Diga (y justifique) cuáles de las discontinuidades halladas en a) son removibles (evitables) y, en caso de serlo, redefina la función para que sea continua en el punto considerado.

Solución: En el intervalo $(0, \sqrt{2})$ f es una función polinomial y por lo tanto es continua allí. Por la misma razón f es continua en $(-\sqrt{2}, 0)$ y en $(-\infty, -\sqrt{2})$. En $(\sqrt{2}, \infty)$ f es composición de funciones continuas (exponencial con función polinomial) y por lo tanto es continua allí. Por lo tanto las únicos puntos donde f podría ser discontinua son $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Tenemos que $f(-\sqrt{2}) = -1$, $f(0) = 0$ y $f(\sqrt{2}) = 0$. Mientras que

$$\lim_{x \to (-\sqrt{2})^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to (-\sqrt{2})^{\pm}} x^2 = 2,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

y

$$\lim_{x \to (\sqrt{2})^+} f(x) = 1.$$

Los puntos de discontinuidades son $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Por otro lado,

$$\lim_{x \to (-\sqrt{2})^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to (-\sqrt{2})^{\pm}} x^2 = 2,$$

pero $f(-\sqrt{2}) = -1$. Por lo que $x = -\sqrt{2}$ es discontinuidad evitable (removible).

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2.$$

Por lo que $x = 0$ es discontinuidad inevitable (no removible).

$$\lim_{x \to (\sqrt{2})^-} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to (\sqrt{2})^+} f(x) = 1.$$

Por lo que $x = \sqrt{2}$ es discontinuidad inevitable (no removible).

Finalmente, la función redefinida sería:

$$g(x) = \begin{cases} (x-\sqrt{2})^2, & \text{si } 0 < x \leq \sqrt{2}, \\ e^{x^2-2}, & \text{si } x > \sqrt{2}, \\ x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

4. (7 ptos.) Considere la función $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$. Demuestre que el límite de $f(x)$ es igual a 0, cuando x tiende a 3.

Primera Solución: Como $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$ es un polinomio, entonces f es continua. Así, el problema se reduce a hallar el valor de $f(3)$.

Ya que $f(3) = 2(3^2) - 12(3) + 18 = 2(3-3)^2 = 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 0.$$

Segunda Solución: Dado $\varepsilon > 0$, se debe encontrar $\delta > 0$, tal que si $|x-3| < \delta$ entonces $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$.

Ya que $f(x) = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x-3)^2$ y $f(3) = 0$ el problema se reduce a demostrar que existe $\delta > 0$, tal que si $|x-3| < \delta$ entonces $|2(x-3)^2| < \varepsilon$.

Como $|2(x-3)^2| = 2|x-3|^2$, tomando $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Tenemos que si $|x-3| < \delta$, entonces

$$|2(x-3)^2| = 2|x-3|^2 < 2\delta^2 = \varepsilon.$$